Errores de Redondeo y de Truncamiento
Parte I

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Objetivos (1/2)

- Entender la diferencia entre exactitud y precisión.
- Aprender como cuantificar el error.
- Aprender como la estimación del error puede utilizarse para decidir cuando finalizar un cálculo iterativo.
- Entender de qué manera ocurren los errores debido a que las computadoras tiene una capacidad limitada para representar números.
- Entender porqué los números en formato de punto flotante tienen límites en su rango y precisión.

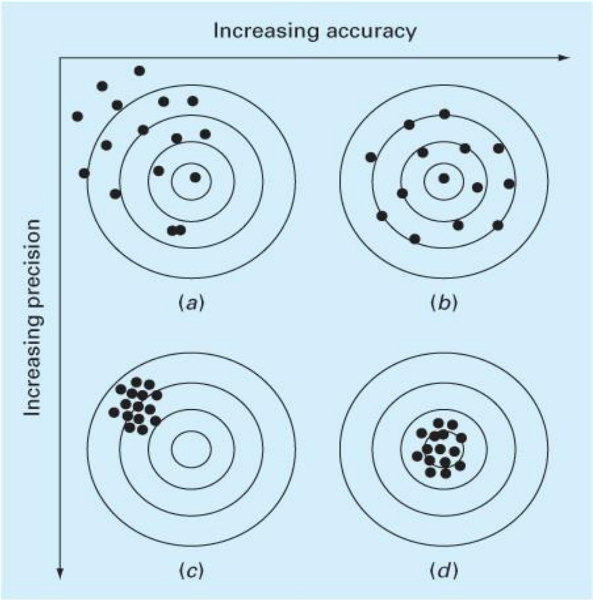
Objetivos (2/2)

- Reconociendo que los errores de truncamiento ocurren cuando las formulaciones matemáticas exactas están representadas por aproximaciones.
- Sabiendo usar la serie Taylor para estimar errores de truncamiento
- Comprendiendo cómo escribir aproximaciones de las derivadas primera y segunda en diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas.
- Reconociendo que los esfuerzos para minimizar los errores de truncamiento a veces pueden aumentar los errores de redondeo.

Exactitud y Precisión

- ***Exactitud:*** Se refiere a qué tan de cerca un valor calculado o medido concuerda con el valor verdadero.
- ***Precisión:*** Se refiere a qué tan cerca coinciden los valores individuales medidos o calculados.

a) Inexacto e impreciso
b) Exacto e impreciso
c) Inexacto y preciso
d) Exacto y preciso



Definiciones de Errores (1/2)

- **Error verdadero** (E_v): Es la diferencia entre el valor verdadero y el valor aproximado.

$$E_v = \text{Valor verdadero} - \text{aproximación}$$

- **Error absoluto** ($|E_v|$): Es el valor absoluto de la diferencia entre del valor verdadero y la aproximación.

- **Error relativo fraccional:** Es el error verdadero dividido por el valor verdadero:

$$\text{Error relativo fraccional} = \frac{\text{Valor verdadero} - \text{aproximación}}{\text{Valor verdadero}}$$

- **Error relativo porcentual** (ε_v): error relativo fraccional verdadero expresado como porcentaje.

$$\varepsilon_v = \frac{\text{Valor verdadero} - \text{aproximación}}{\text{Valor verdadero}} x100\%$$

$10 \rightarrow 9$

$\varepsilon = 10\%$

$10{,}000 \rightarrow 9{,}999$

$\varepsilon_v = 0.01\%$

Definiciones de Errores (2/2)

- Las definiciones anteriores de error se basaban en conocer un valor verdadero. Si ese no es el caso, se pueden hacer aproximaciones al error.

- El *error relativo porcentual aproximado* se puede expresar como el error aproximado dividido por la aproximación, expresado como un porcentaje, ¡aunque esto presenta el desafío de encontrar el error aproximado!

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Error aproximado}}{\text{Aproximación}} x100\%$$

- Para *procesos iterativos*, el error puede aproximarse como la diferencia de valores entre iteraciones sucesivas.

$$\varepsilon_a = \frac{\text{Aproximación presente - aproximación previa}}{\text{Aproximación presente}} x100\%$$

Uso de las Estimaciones del Error

- A menudo, al realizar cálculos, es posible que no nos interese el signo del error, pero nos interesa saber si *el valor absoluto del error relativo porcentual* es menor que una tolerancia preespecificada ε_s
    - Para tales casos, el cálculo se repite hasta $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
    - Esta relación se conoce como *criterio de detención*.
- Tenga en cuenta que para el resto de nuestras discusiones, casi siempre empleamos valores absolutos cuando usamos errores relativos.
- Decimos que una aproximación es correcta *al menos en n cifras significativas (dígitos significativos)* si su $|\varepsilon_a|$ es más pequeño que ε_s que tiene un valor:

$$\varepsilon_s = \left(0.5x10^{(2-n)}\right)\%$$

Ejemplo: La función exponencial

- Se sabe que la función exponencial se puede calcular usando:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \text{ : Desarrollo en serie de potencias de MacLaurin}$$

- Evalúe la serie en x = 0.5. Intente agregar términos (1, 2,…, n) hasta que el valor absoluto de la estimación aproximada del error | ε_a | caiga por debajo de un criterio de error preespecificado, ε_s, que se ajusta a tres cifras significativas.

Valor verdadero:

$e^{0.5} = 1.648721$

Terms	Result	ε_t, %	ε_a, %
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Por lo tanto, después de incluir seis términos, el error aproximado cae por debajo de ε_s = 0.05%, y el cálculo finaliza. Sin embargo, tenga en cuenta que, en lugar de tres cifras significativas, ¡el resultado es exacto en cinco! Esto se debe a que, para este caso, ambos criterios son conservadores. Es decir, se aseguran de que el resultado sea al menos tan bueno como lo especifican. Aunque, éste no es siempre el caso para la ecuación del error relativo porcentual aproximado, es cierto la mayoría de las veces.

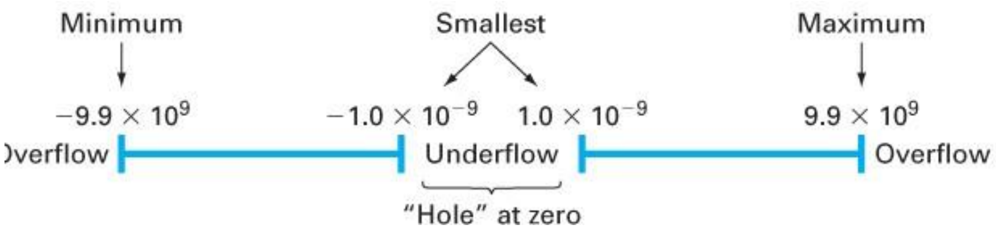
Errores de Redondeo

- Los *errores de redondeo* surgen porque las computadoras digitales no pueden representar algunas cantidades exactamente. Hay dos facetas principales de los errores de redondeo involucrados en los cálculos numéricos:
    - Las computadoras digitales tiene un límite de tamaño y de precisión en su capacidad para representar números.
    - Ciertas manipulaciones numéricas son altamente sensibles a los errores de redondeo.

Sistema de Punto Flotante en Base 10

$$s_1 \underline{d_1.d_2} \times 10^{s_0 \underline{d_0}}$$

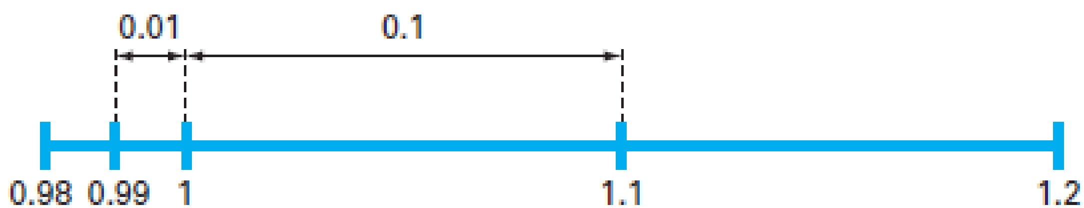
Significando (mantisa) magnitud del exponente



- Si el sistema representa 0.03125 como $3.1 \text{x} 10^{-2}$, se introduce un error de redondeo:

$$\frac{0.03125 - 0.031}{0.03125} = 0.008$$

- El error de redondeo de un número será proporcional a su magnitud.



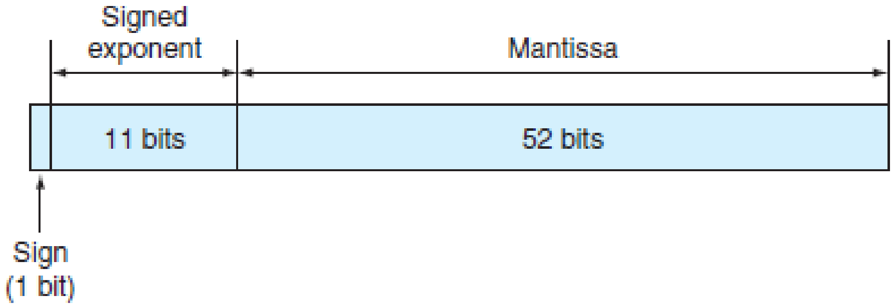
Representación de los Números en la Computadora

- Por defecto, Scilab ha adoptado el formato de precisión doble IEEE en el que se utilizan ocho bytes (64 bits) para representar números de punto flotante:

$$n = \pm(1 + f)2^e$$

Los números binarios consisten exclusivamente de ceros y unos. Cuando se normaliza, el bit inicial (siempre 1) no tiene que ser almacenado. Solo la parte fraccional del significando.

- El signo está determinado por un bit (0 +, 1 -)
- La *mantisa* *f* está determinada por un número binario de 52 bits.
- El exponente *e* está determinado por un número binario de 11 bits, del que se resta 1023 para obtener *e*



$$\text{realmax} = 1.797693134862316\text{e}+308$$
$$\text{realmin} = 2.225073858507201\text{e}-308$$

Rangos del Punto Flotante

- Los valores de -1023 y +1024 para *e* están reservados para significando especiales, por lo que el rango del exponente *e* es -1022 a 1023
- El mayor número posible que Scilab (MATLAB) puede almacenar tiene:
  - *f* con todos 1, dando un significando de $2 - 2^{-52}$, o aproximadamente 2
  - *e* de $(11111111110)_2$, dando un exponente de 2046 - 1023 = 1023
  - Esto produce aproximadamente $2^{1024} \approx 1.797 \times 10^{308}$
- El número más pequeño posible que Scilab (MATLAB) puede almacenar en doble precisión tiene:
  - *f* con todos 0, suministrando un significando de 1
  - *e* de $(00000000001)_2$, dando un exponente de 1 - 1023 = - 1022
  - Esto produce $2^{-1022} \approx 2.2251 \times 10^{-308}$

Precisión del Punto Flotante

- Los 52 bits para la mantisa *f* corresponden a aproximadamente 15 a 16 dígitos en base 10.
- Epsilon (ε) de la máquina: Es la diferencia entre el menor número mayor que uno que la computadora puede representar y uno.

  Por consiguiente, el error relativo máximo entre un número y su representación en Scilab (MATLAB) es, por lo tanto, $2^{-52} = 2.2204 \times 10^{-16}$

Errores de Redondeo en Manipulaciones Aritméticas

- Los errores de redondeo, además de producirse al almacenar números, pueden ocurrir en diversas circunstancias, por ejemplo:
  - ***Número grande de operaciones***: Si un proceso realiza una gran cantidad de cálculos, los errores de redondeo pueden acumularse para volverse significativos

```
function sout = sumdemo()
s = 0;
for i = 1:10000
   s = s + 0.0001;
// notice that 0.0001 cannot be expressed exactly in base - 2.
end
sout = s;
endfunction
```

  - ***Sumar a un número grande uno pequeño***: Como la mantisa del número pequeño se desplaza hacia la derecha para que tenga la misma escala que el número grande, los dígitos se pierden.
  - ***Difuminado***: El difuminado ocurre cada vez que los términos individuales en una suma son más grandes que la suma en sí
    - $(x + 10^{-20}) - x = 10^{-20}$ matemáticamente, pero
    - si $x = 1$; $(x + 10^{-20}) - x$ da 0 en Scilab

Errores de Truncamiento

- Los errores de truncamiento son aquellos que resultan del uso de una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto.
- Ejemplo 1: Aproximación de una derivada usando diferencias finitas:

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

- Ejemplo 2: La serie de Taylor

El Teorema de Taylor y la Serie

- El teorema de Taylor establece que cualquier función uniforme puede aproximarse mediante un polinomio.
- La serie Taylor proporciona un medio para expresar esta idea matemáticamente.
- Un buen contexto de problema es usar series de Taylor para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivados en otro punto.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) \text{ Aproximación constante}$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf^{(1)}(x_i) \text{ Aproximación lineal (línea recta)}$$

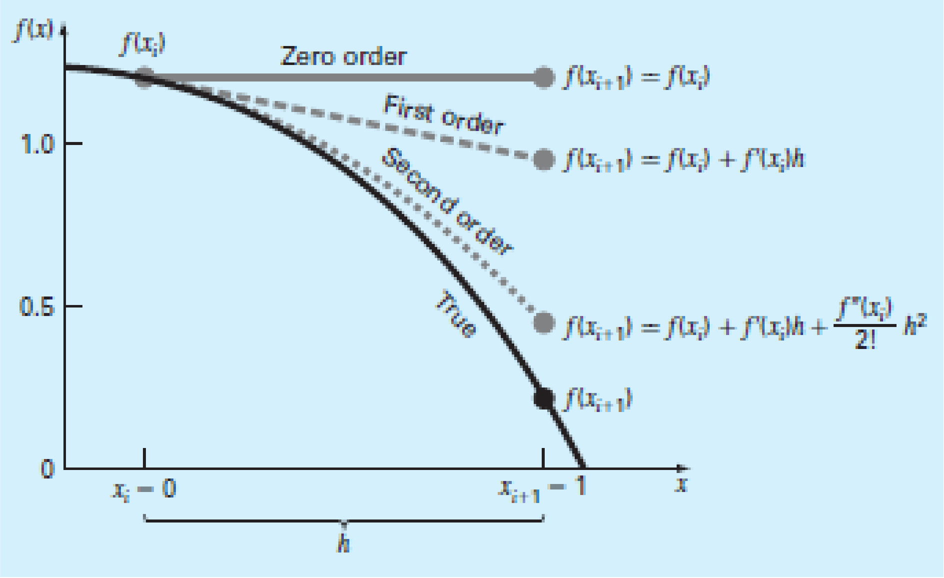
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) \text{ Aproximación cuadrática (parábola)}$$

$$\vdots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{n}(x_i) + R_n$$

La Serie de Taylor

$$f\left(x_{i+1}\right)=f\left(x_i\right)+hf^{(1)}\left(x_i\right)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}\left(x_i\right)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}\left(x_i\right)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{n}\left(x_i\right)+R_n$$



Aproximación de la función:

$$f\left(x\right)=-0.1x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2$$

$$en\,x=1$$

Mediante aproximaciones de Taylor de 0, 1er. y 2do. orden

La Serie de Taylor: El Término Restante

La serie de Taylor de 1er. Orden puede utilarse para calcular la derivada primera de una función analítica:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{(n+1)}$$

El subíndice n indica que representa el remanente para la aproximación de orden n y ξ representa un valor de x entre x_i y x_{i+1}

Más Acerca de los Errores de Truncamiento

- En general, la expansión de la serie de Taylor de enésimo orden será exacta para un *polinomio de orden n*.
- Cualquier función uniforme puede ser aproximada con un polinomio.
- En otros casos, el término restante R_n es del orden de h^{n+1}, que significa:
  - Cuanto más términos se usen, menor será el error y
  - Cuanto más pequeño sea el espaciamiento o incremento, más pequeño será el error para un número dado de términos.

Derivación Numérica (1/2)

- La serie de Taylor de 1er. Orden puede utilizarse para calcular la derivada primera de la función
  - Dada:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} + O\left(h^2\right)$$

  - Entonces:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

- Esto se denomina *diferencia "hacia adelante"* porque utiliza datos en i e i+1 para estimar la derivada primera

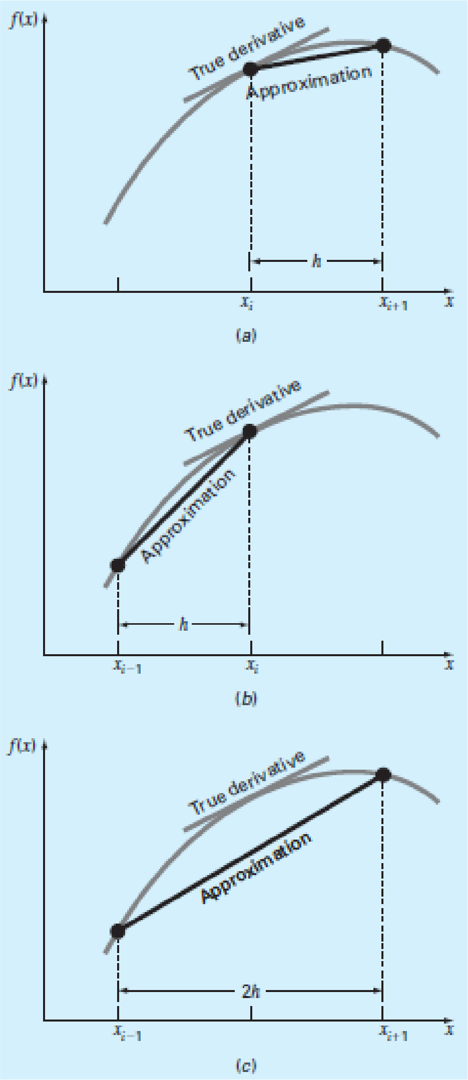
Derivación Numérica (2/2)

- Existen también otras aproximaciones a las derivadas que utilizan diferencias hacia atrás y centradas, según los puntos que utilice para su cálculo:

$$\text{Diferencias hacia adelante: } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

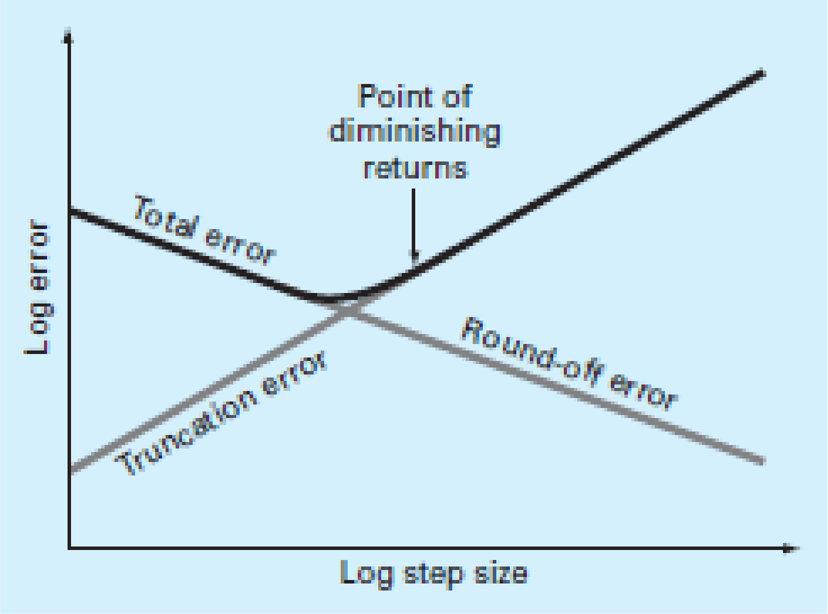
$$\text{Diferencias hacia atrás: } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

$$\text{Diferencias centradas: } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$



Error Numérico Total

- El *error numérico total* es la suma de los errores de truncamiento y de redondeo.
- El error de truncamiento generalmente *aumenta* a medida que aumenta el tamaño del paso, mientras que el error de redondeo *disminuye* a medida que aumenta el tamaño del paso; esto lleva a un punto de rendimientos decrecientes para el tamaño del paso:

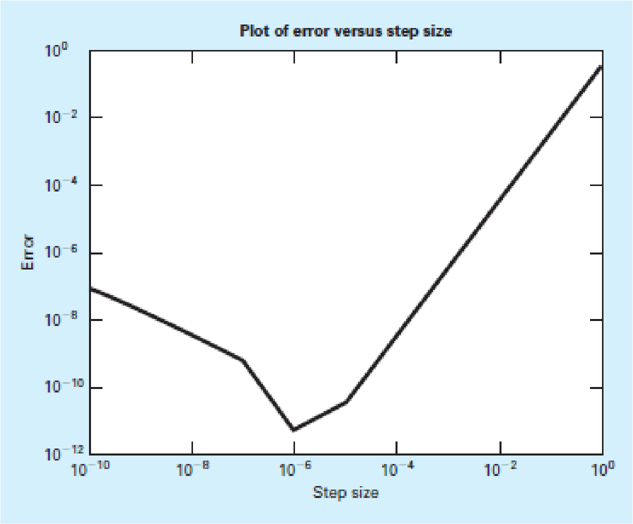


Aproximación de Derivadas por Diferencias Finitas

- Dada la función:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

- Podemos usar una aproximación en diferencias centradas para estimar la primera derivada de la función anterior en x = 0.5
  - Sin embargo, si dividimos progresivamente el tamaño del paso por un factor de 10, los errores de redondeo se vuelven dominantes a medida que se reduce el tamaño del paso.



Otros Errores (1/2)

- ***Blunders***: Errores causados por mal funcionamiento de la computadora o falla humana:
  - En los primeros años de las computadoras, los resultados numéricos erróneos a veces se podían atribuir al mal funcionamiento de la computadora en sí.
  - Hoy, la mayoría de los errores deben atribuirse a fallas o errores humanos.
  - Sólo se pueden evitar con un conocimiento sólido de los principios fundamentales y con el cuidado extremo al abordar y diseñar nuestras soluciones al problema.
- ***Errores de modelo***: Errores resultantes de modelos matemáticos incompletos.
  - Cuando algunos efectos latentes no se tienen en cuenta o se ignoran.

Otros Errores (2/2)

- ***Incertidumbre de los datos***: Errores resultantes de la exactitud y/o precisión de los datos utilizados en los modelos.
  - Cuando utilizamos instrumentos sesgados (subestimación/sobreestimación) o imprecisos
  - Podemos usar estadísticas descriptivas (es decir, media y varianza) para proporcionar una medida del sesgo y la imprecisión
- Durante la mayor parte de este curso, asumiremos que no hemos cometido errores graves (*blunders*), tenemos un modelo sólido y estamos tratando con mediciones sin errores.