Matemática Superior Aplicada

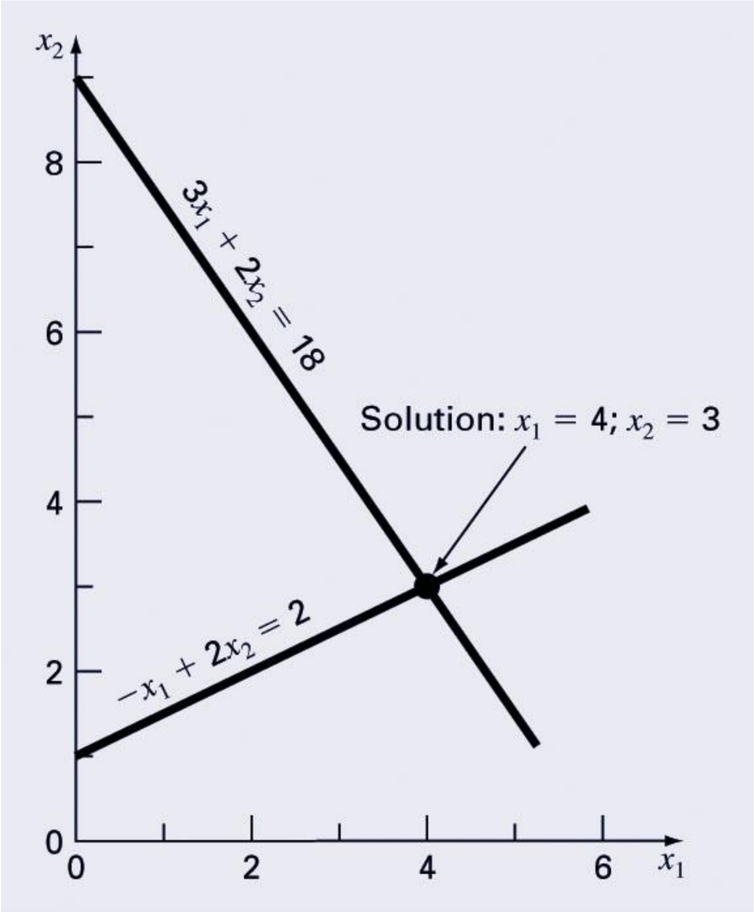
Solución de Ecuaciones Algebraicas Lineales
Parte (II)

Profesor: Dr. Alejandro S. M. Santa Cruz
JTP: Dr. Juan Ignacio Manassaldi
Auxiliar: Srta. Amalia Rueda

Esquema

- Cómo resolver conjuntos pequeños ($n \leq 3$) de ecuaciones algebraicas lineales (no requiere una computadora)
- El método gráfico
- Regla de Cramer
- Cómo resolver conjuntos grandes ($n > 3$) de ecuaciones algebraicas lineales (algoritmos de solución que se pueden implementar en una computadora)
- Método de eliminación de Gauss: una introducción

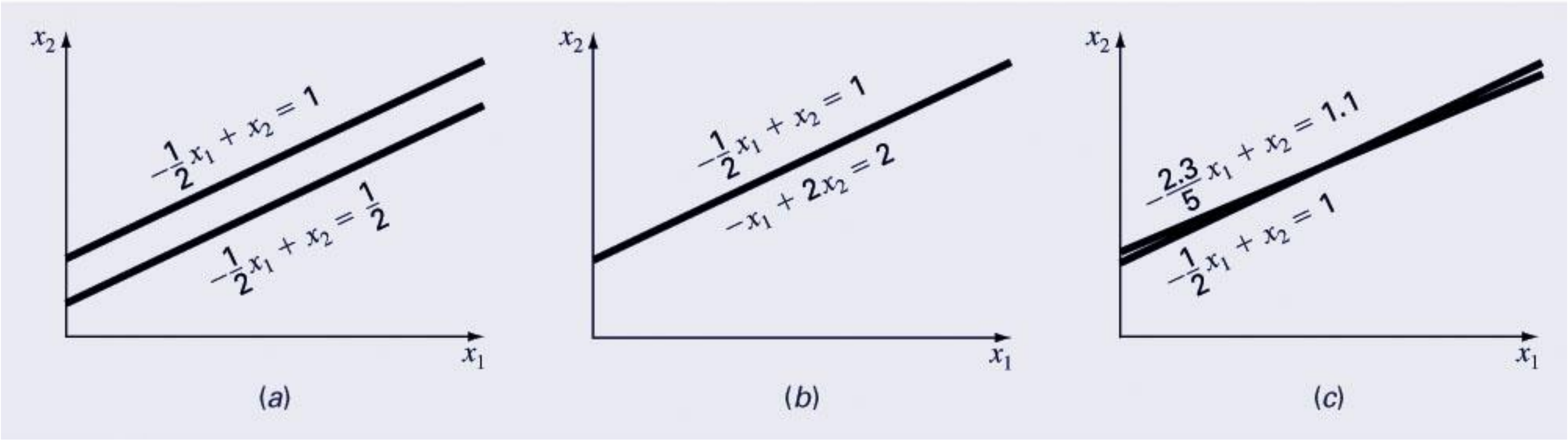
El Método Gráfico



- Solución gráfica de un conjunto de dos ecuaciones algebraicas lineales: Solución representada por la intersección de las dos líneas rectas.
- <u>Observaciones</u>:
  - Funciona si el sistema de ecuaciones es pequeño (n≤3); impráctico para grandes sistemas.
  - La solución resultante no es muy exacta.
  - Útil para visualizar las propiedades de la solución.

Algunos Ejemplos

- **Sistemas singulares**: (a) no tienen solución y (b) infinitas soluciones.
- **Sistemas mal condicionados**: (c) las pendientes de las dos líneas rectas están demasiado juntas y el punto de intersección es difícil de visualizar.



La Regla de Crámer

- Determinante |*A*| de una matriz [A]:
  - Para pequeñas matrices:

$$1\times 1 \qquad \left|a_{11}\right| = a_{11}$$

$$2\times 2 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$3\times 3 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Menores

Observación: Para matrices grandes, el cálculo de los determinantes puede ser muy complicado. El determinante | A | es un número.

La Regla de Crámer (cont.)

- Resolviendo un pequeño sistema de ecuaciones algebraicas lineales utilizando la regla de Crámer.
  - Ejemplo: Resolver tres ecuaciones algebraicas lineales dadas por:

    [A]**x** = **b**, donde: $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \; x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$
  - Solución por la regla de Crámer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \textit{ similarmente para } x_2 \textit{ y } x_3.$$

  - Observaciones: Gran esfuerzo computacional; exactitud limitada por los errores de redondeo; impráctica para grandes sistemas.

Un Ejemplo

- Encontrar la solución del siguiente SEAL utilizando la regla de Crámer:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15$$

El Método de Eliminación de Gauss

- Ingenuo: El algoritmo no evita el problema de la división por cero.
- Eliminación de Gauss:
  - Inspiración: Eliminación de incógnitas
  - Dos pasos principales:

    (1) Eliminación hacia adelante

    (2) Sustitución hacia atrás.

Un Ejemplo

- ¿Podemos diseñar un algoritmo sistemático de solución para que pueda implementarse en una computadora?

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3$$

- Sí! El método de eliminación de Gauss.